Problemi di Fisica

Meccanica dei Fluidi

Equilibrio dei fluidi

PROBLEMA

Completa la seguente tabella:

Forza (N)	10	20	…	80
Superficie (m^2)	1	5	4	…
Pressione (bar)	10	…	50	5

SOLUZIONE

Tenendo presente la definizione di pressione:

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza applicata}}{\text{superficie su cui agisce la forza}} \Rightarrow p = \frac{F}{S}$$

e le sue formule inverse:

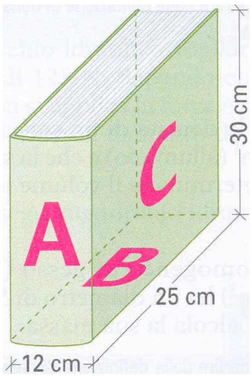
$$F = p \cdot S \qquad S = \frac{F}{p}$$

la tabella risulta così completata:

Forza (N)	10	20	**200**	80
Superficie (m^2)	1	5	4	**16**
Pressione (bar)	10	**4**	50	5

PROBLEMA

Sono dati 3 volumi di una enciclopedia uguali tra loro, ciascuno dei quali con massa di 2 kg.



1. Calcola la pressione quando un volume è appoggiato sulla faccia *A*.
2. Calcola la pressione quando un volume è appoggiato sulla faccia *B*.
3. Calcola la pressione quando un volume è appoggiato sulla faccia C.
4. Supponendo di dover sovrapporre i tre volumi appoggiandoli su un tavolo su una faccia a tuo piacere, determina la pressione massima e minima che essi possono esercitare.

SOLUZIONE

1. La pressione esercitata dal volume quando è appoggiato sulla faccia A è data da:

$$p_A = \frac{F}{S_A} = \frac{mg}{0{,}12 \cdot 0{,}30} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{0{,}036} = 544 \text{ Pa}$$

dove la forza F non è altro che la forza peso esercitata dal libro sulla superficie A.

2. La pressione esercitata dal volume quando è appoggiato sulla faccia B è data da:

$$p_B = \frac{F}{S_B} = \frac{mg}{0{,}12 \cdot 0{,}25} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{0{,}03} = 653 \text{ Pa}$$

dove la forza F non è altro che la forza peso esercitata dal libro sulla superficie B.

3. La pressione esercitata dal volume quando è appoggiato sulla faccia C è data da:

$$p_C = \frac{F}{S_C} = \frac{mg}{0{,}25 \cdot 0{,}30} = \frac{2 \cdot 9{,}8}{0{,}075} = 261 \text{ Pa}$$

dove la forza F non è altro che la forza peso esercitata dal libro sulla superficie C.

4. La pressione esercitata complessivamente dai tre volumi è massima quando questi sono appoggiati sul tavolo con la faccia A:

$$p_T = \frac{F_T}{S_C} = \frac{3 \cdot mg}{0{,}12 \cdot 0{,}30} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{0{,}036} = 1633 \text{ Pa}$$

dove la forza F_T non è altro che la forza peso totale esercitata dai tre volumi appoggiati sulle facce C.

La pressione esercitata complessivamente dai tre volumi è minima quando questi sono appoggiati sul tavolo con la faccia A:

$$p_T = \frac{F_T}{S_C} = \frac{3 \cdot mg}{0{,}25 \cdot 0{,}30} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{0{,}075} = 784 \text{ Pa}$$

dove la forza F_T non è altro che la forza peso totale esercitata dai tre volumi appoggiati sulle facce A.

PROBLEMA

Un laghetto ghiacciato può sopportare al massimo una pressione di 2,1 N/cm^2. Marco di 75 kg vorrebbe attraversarlo tenendo sulle spalle suo figlio Luigi di 22 kg.

a) Se l'area d'appoggio dei piedi di Marco è 420 cm^2 ci riesce senza sprofondare? Motiva la risposta.
b) Quale dovrebbe essere l'area d'appoggio dei suoi piedi per riuscirci?

SOLUZIONE

a) La pressione esercitata da Marco con il figlio sulle spalle è data da:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{(75 + 22) \cdot 9{,}8}{420} = 2{,}26 \, \text{N} / \text{cm}^2$$

dove la forza F non è altro che la forza peso esercitata da Marco e dal figlio, ecco per cui nella formula della pressione vi è la somma delle masse.

Poiché la pressione esercitata è maggiore di quella che il laghetto ghiacciato può sopportare, Marco e suo figlio sprofonderanno.

b) Dalla formula inversa della pressione ricaviamo l'area di appoggio che dovrebbe avere Marco per non sprofondare:

$$S = \frac{F}{p} = \frac{(75 + 22) \cdot 9{,}8}{2{,}1} = 453\,cm^2$$

Nella formula di S il valore della pressione p è quello che il laghetto ghiacciato può sopportare.

PROBLEMA

Su una superficie circolare con diametro di 740 mm agisce, in direzione perpendicolare, una forza di 250 N. Calcola la pressione. Supponendo che la forza sia distribuita uniformemente sulla superficie, che cosa succede alla pressione se il diametro diventa la metà?

SOLUZIONE

La superficie su cui agisce la forza essendo circolare si calcola come:

$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}370)^2 = 0{,}43\,m^2 \qquad \text{dove: } R = 370 \text{ mm} = 0{,}370 \text{ m}$$

Pertanto, la pressione è:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{250}{0{,}43} = 581\,Pa$$

Se il diametro si dimezza, la superficie diventa:

$$S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}185)^2 = 0{,}107\,m^2$$

e la pressione aumenta:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{250}{0{,}107} = 2336\,Pa$$

In particolare, senza le approssimazioni nei calcoli, si può verificare che se il diametro dimezza, la pressione aumenta di quattro volte.

PROBLEMA

Una forza di 40 N, applicata perpendicolarmente su una superficie di forma quadrata, provoca una pressione di 500 Pa. Calcola il lato della superficie.

SOLUZIONE

A partire dalla definizione di pressione ricaviamo la formula della superficie su cui agisce la forza:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{p} = \frac{40}{500} = 0{,}08\,m^2$$

Poiché la superficie è un quadrato, dalla formula dell'area ricaviamo il lato del quadrato:

$$S = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{S} = \sqrt{0{,}08} = 0{,}283\,m = 28{,}3\,cm$$

PROBLEMA

Completa la seguente tabella:

Massa (kg)	10	150	...	...	120	200
Volume (m^3)	1	0,01	0,02	0,5	...	...
Densità (kg/m^3)	...	...	10000	2	30	50

a) Quale relazione di proporzionalità vi è tra massa e densità, a parità di volume?
b) Quale relazione di proporzionalità vi è tra volume e densità, a parità di massa?

SOLUZIONE

Tenendo presente la definizione di densità:

$$\text{densità} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V}$$

e le sue formule inverse:

$$(1)\quad m = \rho \cdot V \qquad (2)\quad V = \frac{m}{\rho}$$

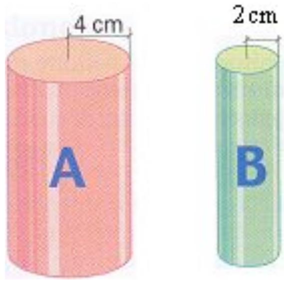
la tabella risulta così completata:

Massa (kg)	10	150	**200**	**1**	120	200
Volume (m^3)	1	0,01	0,02	0,5	**4**	**4**
Densità (kg/m^3)	**10**	**15000**	10000	2	30	50

Dalla relazione (1) si ricava che tra massa e densità, a parità di volume, esiste una proporzionalità diretta.

Dalla relazione (2) si ricava che tra volume e densità, a parità di massa, esiste una proporzionalità inversa

PROBLEMA



I solidi A e B hanno entrambi massa 5 kg:

a) Quale dei due solidi ha maggior densità?

SOLUZIONE

a) Dalla definizione di densità:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

si ricava che, a parità di massa, il cilindro che avrà il volume più piccolo avrà la densità maggiore.
Pertanto, poiché il cilindro B ha un raggio inferiore a quello del cilindro A, il suo volume è più piccolo e quindi ha la densità maggiore.

PROBLEMA

Un gas è contenuto in un cilindro a pistone mobile. Il cilindro ha un diametro di 24 cm e un'altezza di 32 cm. La massa del gas contenuto è 2 g.

a) Qual è la densità del gas?
b) Se il pistone si alzasse di 8 cm, quale diventerebbe la densità del gas?
c) Di quanto si dovrebbe alzare il pistone affinché la densità iniziale si dimezzi?

SOLUZIONE

a) Il volume di un cilindro si calcola come:

$$V = \pi R^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}32 = 0{,}0145\,m^3$$

per cui, la densità del gas contenuto nel cilindro è:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}002}{0{,}0145} = 0{,}14\,kg/m^3$$

b) Se il pistone si alza di 8 cm la sua altezza diventa 40 cm, per cui il volume del cilindro assume il seguente valore:

$$V = \pi R^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}40 = 0{,}018\,m^3$$

Pertanto, ad un aumento di volume corrisponderà una diminuzione della densità del gas:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}002}{0{,}018} = 0{,}11\,kg/m^3$$

c) Se la densità iniziale si dimezza, ossia assume il valore 0,07 kg/m^3, il volume corrispondente sarà:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}002}{0{,}07} = 0{,}0286\,m^3$$

e quindi, dalla formula del volume del cilindro ricaveremo di quanto s'innalzerà il pistone:

$$V = \pi R^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{0{,}0286}{3{,}14 \cdot 0{,}12^2} = 0{,}64\,m = 64\,cm$$

Attenzione all'uso delle unità di misura.

PROBLEMA

Un cilindro omogeneo di gesso con densità $\rho = 2{,}32 \cdot 10^3$ kg/m^3 ha un diametro di 5 cm e un'altezza di 12 cm. Calcolare la sua massa.

SOLUZIONE

A partire dalla definizione di densità, ricaviamo la massa come formula inversa:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 2{,}32 \cdot 10^3 \cdot 2{,}36 \cdot 10^{-4} = 0{,}55\,kg$$

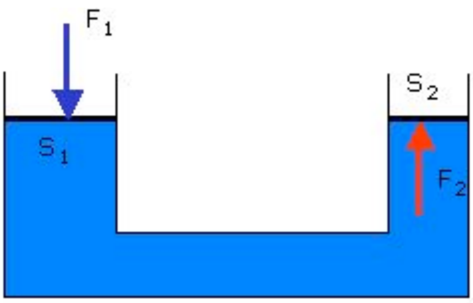
dove il volume del cilindro di gesso va calcolato nel seguente modo:

$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (0{,}025)^2 \cdot 0{,}12 = 2{,}36 \cdot 10^{-4} m^3$$

Attenzione all'uso delle unità di misura.

PROBLEMA

In un torchio idraulico due pistoni separati da un fluido hanno diametro rispettivamente di 25 cm e 7,5 cm. Se sul primo viene applicata una forza di 50 N, trova quale forza si trasmette al secondo pistone. Quanto vale la pressione che sollecita i pistoni?



SOLUZIONE

Il torchio idraulico, come conseguenza del principio di Pascal, sfrutta la seguente relazione:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

da cui è possibile ricavare, note le superfici e la forza F_1, la forza che si trasmette sul secondo pistone:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} = 50 \cdot \frac{0{,}0044}{0{,}05} = 4{,}4\,N$$

e dove le superfici dei pistoni, essendo circolari, si calcolano come:

$$S_1 = \pi R_1^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}125)^2 = 0{,}05\ m^2 \qquad S_2 = \pi R_2^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}0375)^2 = 0{,}0044\ m^2$$

PROBLEMA

Dimensiona un cilindro di un torchio idraulico, cioè stabilisci quale deve essere il diametro, in modo tale che, se su un pistone di superficie pari a 0,025 m^2 viene applicata una forza di 500 N, esso possa trasmettere una forza di 9500 N.

SOLUZIONE

Il torchio idraulico, come conseguenza del principio di Pascal, sfruttando la seguente relazione:

$$(1) \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

può essere dimensionato in maniera tale che data una forza, questa può essere trasmessa in un'altra zona del fluido con un'intensità maggiore.
Infatti, dalla (1) ricaviamo la superficie S_2:

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} = 0{,}025 \cdot \frac{9500}{500} = 0{,}475\,m^2$$

Dalla formula della superficie di un cerchio, ricaviamo il raggio e quindi il diametro che deve avere il cilindro del torchio idraulico:

$$S_2 = \pi R_2^2 \Rightarrow R_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}475}{3{,}14}} = 0{,}389\,m \Rightarrow D = 2R = 2 \cdot 0{,}389 = 0{,}778\,m = 77{,}8\,cm$$

PROBLEMA

Hai un recipiente cilindrico alto 1 m contenente acqua.

1. Completa la seguente tabella dove l'altezza è quella della colonna d'acqua calcolata a partire dalla superficie libera e non dal fondo del recipiente;

Altezza (cm)	0,1	0,3	0,4	0,8
Pressione (Pa)	...	...	...	...

2. Quale tipo di proporzionalità intercorre tra altezza e pressione;

SOLUZIONE

1. Utilizzando la legge di Stevino:

$$p = \rho g h$$

e conoscendo la densità dell'acqua ($\rho = 10^3$ kg/m^3), la tabella viene così completata:

Altezza (m)	0,1	0,3	0,4	0,8
Pressione (Pa)	**981**	**2943**	**3924**	**7848**

2. Tra la pressione e l'altezza esiste una proporzionalità diretta.

PROBLEMA

Il fondo di un ampolla può sopportare al massimo una pressione di 10 000 Pa. Quale altezza massima può raggiungere nell'ampolla una colonnina di mercurio senza che essa esploda?

SOLUZIONE

L'altezza massima va calcolata come formula inversa della legge di Stevino:

$$p = \rho gh \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g} = \frac{10000}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81} = 0{,}075\,\text{m} = 7{,}5\,\text{cm}$$

dove $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3 è la densità del mercurio (valore che si trova in tabella).

PROBLEMA

Determinare a quale profondità si deve scendere nell' oceano ($\rho = 0{,}103 \cdot 10^4$ kg/m^3) affinché si sia soggetti a una pressione di $5{,}05.10^5$ Pa.

SOLUZIONE

La profondità va calcolata come formula inversa della legge di Stevino:

$$p = \rho gh \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g} = \frac{5{,}05 \cdot 10^5}{0{,}103 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81} = 50\,\text{m}$$

PROBLEMA

Nel Sole alla profondità di 50 m dalla superficie si registra una pressione di $1{,}92888 \cdot 10^7$ Pa; calcolare la densità media di questa stella, sapendo che l'accelerazione di gravità è 273,6 m/s^2.

SOLUZIONE

La densità va calcolata come formula inversa della legge di Stevino:

$$p = \rho gh \Rightarrow \rho = \frac{p}{gh} = \frac{1{,}92888 \cdot 10^7}{273{,}6 \cdot 50} = 1410\,\text{kg/m}^3$$

PROBLEMA

Calcolare la pressione entro un fluido a una profondità di 1,991 km, sapendo che una massa di tale fluido pari a 5120 kg occupa un volume di 5 m^3

SOLUZIONE

La pressione entro il fluido alla profondità di 1,991 km = $1{,}991 \cdot 10^3$ m si calcola attraverso l'applicazione della legge di Stevino:

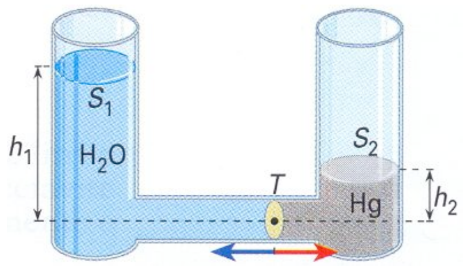
$$p = \rho g h = 1024 \cdot 9{,}81 \cdot 1991 = 200 \cdot 10^5 Pa = 200\,bar$$

sapendo che la densità del fluido è data da:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{5120}{5} = 1024\,kg/m^3$$

PROBLEMA

I due vasi comunicanti rappresentati in figura sono occupati in parte da acqua e in parte da mercurio. Sapendo che la densità del mercurio è di 13 600 kg/m^3 e che la sua altezza rispetto alla membrana scorrevole di separazione *T* è di 25 cm, determina l'altezza della colonna d'acqua necessaria per equilibrare quella di mercurio.



SOLUZIONE

Le pressioni esercitate dal mercurio e dall'acqua sulla membrana T sono date dalla legge di Stevino:

$$p_{acqua} = \rho_{acqua} \cdot g \cdot h_1 \qquad p_{mercurio} = \rho_{mercurio} \cdot g \cdot h_2$$

Affinché la colonna d'acqua possa equilibrare quella di mercurio deve avere un'altezza che si ricava dall'uguaglianza delle due pressioni:

$$p_{acqua} = p_{mercurio}$$

$$\rho_{acqua} \cdot g \cdot h_1 = \rho_{mercurio} \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \cdot \frac{\rho_{mercurio}}{\rho_{acqua}} = 25 \cdot \frac{13{,}6 \cdot 10^3}{10^3} = 340\,cm = 3{,}40\,m$$

PROBLEMA

Una palla con raggio di 4 cm viene immersa prima nell'acqua (ρ = 10^3 kg/m^3), poi nell'olio (ρ = 0,92·10^3 kg/m^3) e infine nel mercurio (ρ = 1,360·10^4 kg/m^3). Quanto valgono le spinte di Archimede che i rispettivi fluidi esercitano su di essa?

SOLUZIONE

Il principio di Archimede, in forma matematica, si esprime attraverso la seguente formula:

$$S_A = \rho \cdot g \cdot V$$

dove:

- S_A = spinta di Archimede; ρ = densità del fluido; g = accelerazione di gravità; V = volume del fluido spostato

Pertanto, applicando la (1) ai vari liquidi nei quali la palla è immersa, si ottengono le seguenti spinte:

$$S_{acqua} = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-4} = 2{,}63\,N$$

$$S_{olio} = 0{,}92 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-4} = 2{,}42\,N$$

$$S_{mercurio} = 1{,}360 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-4} = 35{,}8\,N$$

dove il volume della palla, che è una sfera, si calcola come:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04^3 = 2{,}68 \cdot 10^{-4}\ m^3$$

PROBLEMA

Sono date due sfere *A* e *B* entrambe di volume 1 m^3. La sfera *A* è di ferro, *B* è d'oro.

1. Se vengono immerse in acqua ricevono la stessa spinta? Motiva la risposta.
2. Se A viene immersa nella benzina, riceve la stessa spinta che riceveva in acqua?
3. Calcola la spinta che riceve A prima in acqua e poi nella benzina.

SOLUZIONE

1. Il principio di Archimede, in forma matematica, si esprime attraverso la seguente formula:

$$S_A = \rho \cdot g \cdot V$$

per cui, le sfere A e B riceveranno la stessa spinta se vengono immerse in acqua in quanto hanno lo stesso volume V, sono sottoposte alla stessa accelerazione di gravità g e sono immerse nello stesso liquido ρ.

2. Se A viene immersa nella benzina riceverà una spinta minore di quella che riceveva in acqua, in quanto a parità di volume V, la densità della benzina ($\rho = 0{,}70 \cdot 10^3$ kg/m^3) è inferiore a quella dell'acqua.

3. Calcoliamo le spinte ricevute da A prima in acqua e poi nella benzina:

$$S_{acqua} = \rho \cdot g \cdot V = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 9810\,N \qquad S_{benzina} = \rho \cdot g \cdot V = 0{,}70 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 6867\,N$$

PROBLEMA

Calcolare la densità di un fluido, sapendo che immergendo in esso un corpo di volume pari a 64 cm^3, quest'ultimo subisce una spinta verso l'alto di 0,70 N.

SOLUZIONE

A partire dalla formula che esprime il principio di Archimede, calcoliamo la densità del fluido come formula inversa:

$$S_A = \rho \cdot g \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{S_A}{g \cdot V} = \frac{0{,}70}{9{,}81 \cdot 64 \cdot 10^{-6}} = 1115\,kg/m^3 \qquad \text{dove: } 1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3$$

PROBLEMA

Abbiamo misurato che una sfera, il cui raggio è di 3 cm, riceve, se immersa in acqua, una spinta verso l'alto di 0,183 N. Stabilire, motivando la risposta, se ci troviamo sulla superficie della Terra oppure su una base posta sulla Luna.

SOLUZIONE

Per stabilire in che luogo ci troviamo, sulla Terra o sulla Luna, dobbiamo calcolare l'accelerazione di gravità a cui è soggetta la sfera. Pertanto, dalla formula che esprime il principio di Archimede, calcoliamo g:

$$S_A = \rho \cdot g \cdot V \Rightarrow g = \frac{S_A}{\rho \cdot V} = \frac{0{,}183}{10^3 \cdot 1{,}13 \cdot 10^{-4}} = 1{,}62\,m/s^2$$

dove: $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03^3 = 1{,}13 \cdot 10^{-4}\ m^3$

Dal valore ricavato possiamo affermare che ci troviamo sulla Luna, infatti:

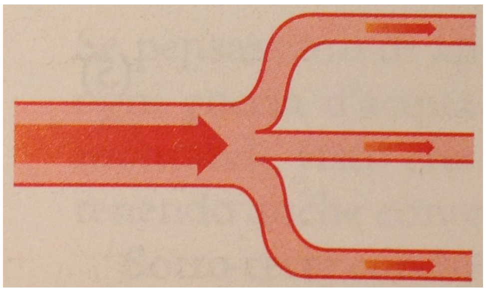
$$g_{luna} \approx \frac{1}{6} g_{terra} \approx \frac{1}{6} \cdot 9{,}81 \approx 1{,}64\,m/s^2$$

Dinamica dei fluidi

PROBLEMA

L'aorta di un adulto ha un raggio do 1,0 cm e una portata di 6,0 dm^3/min. Qual è, in essa, la velocità del flusso sanguigno? Sapendo che la velocità del sangue nelle arterie direttamente alimentate dall'aorta è uguale a 5,0 cm/s, qual è l'area della sezione trasvresale complessiva di tali arterie?

SOLUZIONE



La sezione trasversale dell'aorta, approssimabile a un cerchio, vale:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}010 = 0{,}0314 \ m^2$$

Dalla definizione di portata, ricaviamo la velocità del sangue nell'aorta:

$$Q = Sv \Rightarrow v = \frac{Q}{S} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-4}}{0{,}0314} = 0{,}32 \ m/s \quad dove \ Q = 6{,}0 dm^3/\min = 1{,}0 \cdot 10^{-4} \ m^3/s$$

Per l'equazione di continuità, detta S' l'area della sezione trasversale complessiva delle arterie alimentate dall'aorta, nelle quali è nota la velocità v' con cui scorre il sangue, si ha:

$$Sv = S'v' \Rightarrow S' = S \cdot \frac{v}{v'} = 0{,}0314 \cdot \frac{0{,}32}{0{,}050} = 2{,}0 \cdot 10^{-3} m^2$$

PROBLEMA

Un aneurisma è una dilatazione localizzata di un vaso sanguigno dovuta a un'alterazione della sua parete. Supponiamo che in una certa zona l'area della sezione trasversale di un'arteria sia 1,5 volte maggiore del normale e che la velocità del sangue nei tratti non alterati della stessa arteria sia di 0,20 m/s. Assumendo che l'arteria sia orizzontale e sapendo che la densità del sangue è pari a 1,06•10^3 kg/m^3, qual è la differenza fra la pressione nell'aneurisma e la pressione nella parte sana dell'arteria?

SOLUZIONE

Se nella parte sana dell'arteria il sangue attraversa con velocità v_0 un'area S_0 che nell'aneurisma si dilata al valore S, dall'equazione di continuità segue che nell'aneurisma la velocità v del flusso sanguigno è:

$$S_0 v_0 = Sv \;\Rightarrow\; v = v_0 \cdot \frac{S_0}{S} = \frac{0,20}{1,5} = 0,13\,m/s \qquad dove\;\; \frac{S}{S_0} = 1,5 \rightarrow \frac{S_0}{S} = \frac{1}{1,5}$$

Poichè l'arteria è orizzontale, possiamo applicare l'equazione di Bernouilli, in cui mancherà il termine dhg, per determinare la differenza fra la pressione p nell'aneurisma e la pressione p_0 nella zona non alterata:

$$p + \frac{1}{2}dv^2 = p_0 + \frac{1}{2}dv_0^2 \;\rightarrow\; \Delta p = p - p_0 = \frac{1}{2}d(v_0^2 - v^2) = \frac{1}{2}\cdot 1,06\cdot 10^3(0,20^2 - 0,13^2) = 12\,Pa$$

Riflettiamo sul risultato

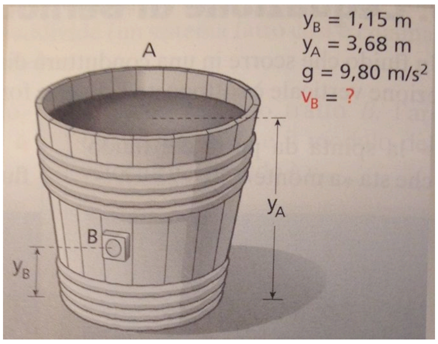
La differenza di pressione è positiva, cioè la pressione p nell'aneurisma è maggiore di quella nella zona non alterata. Pertanto, l'eccesso di pressione sottopone a uno sforzo addizionale il tessuto già indebolito della parete dell'arteria, con conseguente rottura.

Cosa ci aspettiamo in una stenosi (restringimento dell'arteria)? Una variazione di pressione negativa.

PROBLEMA

In un tino la superficie libera del vino è a 3,68 m da terra. Nella parte bassa del tino, a 1,15 m da terra, c'è un'apertura chiusa con un tappo. Calcolare la velocità con cui il vino esce dall'apertura se si toglie il tappo (poniamo g=10 m/s^2)

SOLUZIONE



Il vino, come gli altri liquidi, soddisfa le condizioni di applicabilità dell'equazione di Bernouilli.

Poniamo:

- A=superficie superiore del vino nel tino;
- v_A=0 (il recipiente è grande e il foro alla base è piccolo: la velocità con cui diminuisce il livello superiore del vino è trascurabile);
- p_A=p_0 (sulla superficie del vino agisce la pressione atmosferica p_0);
- y_A=3,68 m

- B=superficie del foro alla base del tino;
- v_B=v (è l'incognita del problema)
- p_B=p_0 (è la pressione che agisce su B dall'esterno; la variazione di pressione atmosferica tra la quota A e quella B è trascurabile);
- y_A=1,15 m.

Applichiamo l'equazione di Bernouilli:

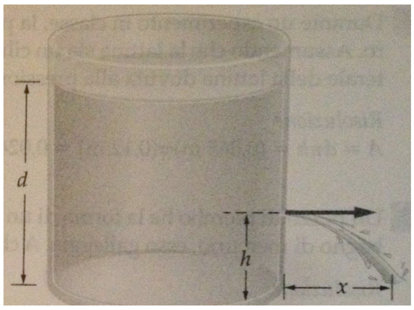
$$p_A + \frac{1}{2}dv_A^2 + dgy_A = p_B + \frac{1}{2}dv_B^2 + dgy_B \xrightarrow{che\;\; diventa} dgy_A = \frac{1}{2}dv^2 + dgy_B$$

Dall'equazione finale, ricaviamo la nostra incognita v, ossia la velocità con cui il vino esce dal foro B:

$$v = \sqrt{2g(y_A - y_B)} = \sqrt{2\cdot 10(3,68 - 1,15)} \cong 7\,m/s$$

PROBLEMA

Un contenitore è riempito d'acqua fino a un'altezza d=2,30 m. A un'altezza h=70 cm rispetto a terra, vi è un foro dal quale fuoriesce dell'acqua. Calcolare la distanza orizzontale del punto di caduta dell'acqua daslla base del contenitore.



SOLUZIONE

Utilizziamo il risultato dell'esercizio precedente, che va sotto il nome di legge di Torricelli, per calcolare la velocità dell'acqua quando fuoriesce dal foro:

$$v=\sqrt{2g(d-h)}=\sqrt{2\cdot 10(2,30-0,70)}\cong 5,7\,m/s$$

Le leggi del moto del proiettile con velocità orizzontale, ci consentono di calcolare la distanza orizzontale x:

$$\begin{cases} x=vt \\ y=\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ricaviamo il tempo dalla seconda equazione:

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e sostituiamolo nella prima, insieme all'espressione della velocità ricavata precedentemente:

$$x=\sqrt{2g(d-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2g(d-h)\cdot\frac{2h}{g}}=\sqrt{4h(d-h)}=2\sqrt{h(d-h)}$$

Sostituendo i dati nell'equazione finale trovata, otteniamo:

$$x=2\sqrt{0,70(2,30-0,70)}=2,12\,m$$

PROBLEMA

Il 16 settembre 2004 l'uragano Ivan, proveniente dal mare dei Caraibi, giunse sulle coste dell'Alabama, negli USA, con venti che raggiungevano la velocità di 54,0 m/s (circa 200 km/h). Se questo vento soffia al di sopra del tetto di una casa, quanto vale la differenza di pressione atmosferica tra l'esterno dell'abitazione e il suo interno? (la densità dell'aria vale 1,29 kg/m^3).

SOLUZIONE

Il vento soffia in orizzontale e l'aria che lo forma non è soggetta a forze che possono comprimerla (fluido incompressibile). Siamo nelle condizioni di applicabilità dell'equazione di Bernouilli.

Poniamo:

- A=zona sopra il tetto della casa
- B= zona interna della casa
- v_B= 0 (velocità nulla dell'aria all'interno della casa)

Applichiamo l'equazione di Bernouilli:

$$p_A + \frac{1}{2}dv_A^2 = p_B + \frac{1}{2}v_B^2 \;\rightarrow\; \Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2}d(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\cdot 1{,}29(0^2 - 54{,}0^2) = -1{,}88\cdot 10^3\,Pa$$

Analisi del risultato

La differenza di pressione ottenuta è negativa. Ciò significa che la pressione che si esercita sul tetto dall'inetrno (cioè dal basso) è maggiore di quella che agisce dall'alto. In particolare, con questa velocità del vento ogni metro quadrato del tetto è sottoposto a una forza verso l'alto pari a:

$$\Delta p = \frac{F}{A} \;\Rightarrow\; F = \Delta p\cdot A = 1{,}88\cdot 10^3\cdot 1 = 1{,}88\cdot 10^3\,N$$

Si tratta di una forza che può fare "esplodere" il tetto verso l'alto al passare dell'uragano, perchè è maggiore della forza peso F_P che agisce su un metro quadrato di tetto. Infatti, tenendo presente che tipicamente il tetto ha una massa di 100 kg/m^3, abbiamo:

$$F_P = mg = 100\cdot 10 \cong 10^3\;\,N$$

Quindi:

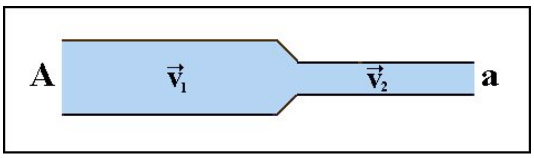
$$F > F_P$$

Questo esercizio ci consente di rispondere perchè nella parte posteriore delle automobili di formula 1 si mettono degli alettoni che hanno il profili di un'ala rovesciata.

PROBLEMA

Dell'acqua scorre in un condotto orizzontale di sezione A=5,0 cm², che si restringe successivamente ad una sezione a=3,5 cm². Conoscere le condizioni del liquido, significa conoscere pressione e velocità prima (p_1 e v_1) e dopo (p_2 e v_2) la strozzatura del condotto. Allora, noti p_1=0,06 atm e v_1=90,0 cm/s, determinare p_2 e v_2

SOLUZIONE



Le variabili del problema sono quattro: le pressioni e le velocità prima e dopo la strozzatura. Di queste, due sono note, fornite come dati del problema, due incognite. Per un problema a due incognite occorrono due equazioni: nel nostro caso, avendo a che fare con un liquido ideale incomprimibile, usiamo l'equazione di continuità e quella di Bernoulli, applicate al caso particolare di un condotto orizzontale per il quale non vi sono quindi variazioni di quota:

$$\begin{cases} p_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} d v_2^2 \\ A v_1 = a v_2 \end{cases}$$

Inserendo i dati del problema, con un pò di algebra, si possono ricavare le variabili incognite. Innanzitutto esprimiamo le grandezze fisiche in gioco attraverso le unità di misura del SI:

$$p_1 = 0{,}06\,atm = 0{,}06 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 = 0{,}061 \cdot 10^5\,Pa \qquad v_1 = 90{,}0\,cm/s = 0{,}90\,m/s$$
$$A = 5{,}0\,cm^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\,m^2 \qquad a = 3{,}5\,cm^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\,m^2 \quad d_{acqua} = 10^3\,kg/m^3$$

Quindi:

$$\begin{cases} 0{,}061 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 0{,}9^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot v_2^2 \\ 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9 = 3{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot v_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo v_2:

$$v_2 = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{3{,}5 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}9 = 1{,}29\,m/s$$

che sostituiamo nella prima equazione per ricavare l'altra incognita p_2:

$$0{,}061 \cdot 10^5 + 0{,}41 \cdot 10^3 = p_2 + 0{,}83 \cdot 10^3$$
$$p_2 = 0{,}061 \cdot 10^5 + (0{,}41 - 0{,}83) \cdot 10^3 = 6{,}1 \cdot 10^3 - 0{,}42 \cdot 10^3 = 5{,}68 \cdot 10^3\,Pa = 0{,}057 \cdot 10^5\,Pa \cong 0{,}057\,atm$$

In definitiva:

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}06\,atm \\ v_1 = 90{,}0\,cm/s \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = 0{,}057\ atm \\ v_2 = 129\,cm/s \end{cases}$$